ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ THỊ KHẢI VÂN

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỒNG NHẤT THỨC LAGRANGE

CHUYÊN NGÀNH: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGUYỄN VĂN NGỌC

THÁI NGUYÊN-2019

Mục lục

Trang

Mở đầu

Mục đích của luận văn này là trình bày một số hệ quả và ứng dụng của đồng nhất thức

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\Big) = \Big|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\Big|^2 + \sum_{1\le i<j\le n}(a_ib_j - a_jb_i)^2 \qquad (1)$$

trong đó a_i, b_i là các số thực hoặc phức.

Đồng nhất thức (1) trong nhiều tài liệu Toán học được mang tên nhà toán học người Pháp, Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Trong chương trình đại số ở bậc THCS, chúng ta đã biết đẳng thức

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1b_1 + a_2b_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2, \qquad (2)$$

là trường hợp đặc biệt của đồng nhất thức (1), với $n = 2$ và a_1, a_2, b_1, b_2 là các số thực tùy ý. Hệ thức này đã được nhà toán học cổ Hy lạp Diophantus đưa ra từ rất lâu, vào khoảng những năm 50 sau Công Nguyên(A.D).

Năm 1773, khi nghiên cứu về hình chóp Lagrange đã tìm ra đồng nhất thức (1) với n=3.

Một hệ quả quan trọng của đồng nhất thức (1) là bất đẳng thức nổi tiếng Cauchy-Schwarz:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\Big) \ge \Big|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\Big|^2 \qquad (3)$$

Cùng với bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, luận văn này sẽ giới thiệu một số bất đẳng thức quan trọng khác phục vụ cho công việc giảng dạy và bồi dưỡng học sinh giỏi (HSG).

Gần đây đã nhận được một số đồng nhất thức đại số là những mở rộng của đồng nhất thức Lagrange cổ điển. Trong luận văn này cũng trình bày một đồng nhất thức dạng Lagrange tổng quát.

Vào năm 1773 [4] Lagrange đưa ra tích véc tơ (cross product) trong không gian $\mathbb{R}^3$ và cho một trong những ứng dụng quan trọng của đồng nhất thức Lagrange là *tích véc tơ* của các véc tơ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, với hai véc tơ $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ tích véc tơ của véc tơ $\mathbf{a}$ với véc tơ $\mathbf{b}$ được ký hiệu là $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ là véc tơ được xác định bởi

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1). \tag{4}$$

Độ dài của các véc tơ trong không gian $\mathbb{R}^3$ được xác định theo công thức

$$||\mathbf{a}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2} \tag{5}$$

Tích vô hướng của các véc tơ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ được xác định theo công thức

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i. \tag{6}$$

Như vậy, đồng nhất thức (1) có thể được viết lại ở dạng

$$||\mathbf{a}||^2||\mathbf{b}||^2 = |\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}|^2 + ||\mathbf{a} \times \mathbf{b}||^2. \tag{7}$$

Luận văn sẽ trình bày một số hệ quả của đồng nhất thức Lagrange để chứng minh các bất đẳng thức và áp dụng của đồng nhất thức Lagrange trong tích véc tơ của các véc tơ.

Luận văn gồm hai chương.

Chương 1: Đồng nhất thức Lagrange, trình bày các đồng nhất thức Lagrange kinh điển dạng thực và dạng phức, đồng nhất thức Lagrange tổng quát và hệ quả và một số đồng nhất thức đạng đa thức.

Chương 2: Trình bày áp dụng của hệ thức Lagrange chứng minh một số đẳng thức đại số và hình học, trình bày một số bất đẳng thức được suy ra từ các hệ quả của bất đẳng thức AM-GM, Cauchy-Schwarz. Xét

một số tính chất quan trọng của tích véc tơ đối với các véc tơ trong không gian $\mathbb{R}^3$.

Trong suốt quá trình học tập và làm luận văn, bên cạnh sự nỗ lực học tập, nghiên cứu và niềm đam mê Toán học của bản thân em là sự hướng dẫn tận tình của TS.NCVC.Nguyễn Văn Ngọc, Trường Đại học Thăng Long. Em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đến Thầy.

Em cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành nhất đến Ban giám hiệu, phòng Đào tạo, Khoa Toán - Tin trường Đại học khoa học, Đại học Thái Nguyên, các thầy, các cô giảng dạy lớp cao học toán K10B2 đã trang bị kiến thức, tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình em học tập tại trường cũng như quá trình làm luận văn.

Em xin cảm ơn các thầy, cô trong Ban giám hiệu, các đồng nghiệp trong Tổ Toán trường Trung học Cơ sở Lê Lợi, quận Hải An thành phố Hải Phòng nơi mà em đang công tác đã luôn tạo điều kiện giúp đỡ và động viên. Xin cảm ơn bạn bè và các học viên trong lớp cao học toán K10B2 đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ em trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Sự quan tâm, động viên và khích lệ của gia đình cũng là nguồn động viên lớn để em hoàn thành khóa luận này.

Tuy bản thân em có đã nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong nhận được sự quan tâm, góp ý của quý thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Em xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2019

Học viên

Vũ Thị Khải Vân

Chương 1

Các đồng nhất thức Lagrange

Chương này trình bày các đồng nhất thức Lagrange từ kinh điển đến tổng quát. Nội dung của chương này chủ yếu được hình thành từ các tài liệu [1], [4], [5] và [7].

1.1 Đồng nhất thức Lagrange kinh điển

1.1.1 Trường hợp số thực

Định lý 1.1.1. (Đồng nhất thức Lagrange kinh điển).
Giả sử $a_k, b_k, k = 1, 2, ..., n$ là các số thực bất kỳ. Khi đó có đồng nhất thức

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big)-\Big(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2. \tag{1.1}$$

Chứng minh. Ta có

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2b_k^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_i^2b_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n} a_i^2b_j^2, \tag{1.2}$$

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\Big)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2b_k^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_ib_ia_jb_j, \tag{1.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_i^2b_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n} a_i^2b_j^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_ib_ia_jb_j. \tag{1.4}$$

Từ (1.2)-(1.4) suy ra (1.1). Định lý được chứng minh. □

Hệ quả 1.1.2. (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz).
Từ (1.1) *suy ra bất đẳng thức*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 \le \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big). \tag{1.5}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{a_j}{b_j}, \ \ i, j = 1, 2, ..., n.$$

Nhận xét 1.1.3. *Trong không gian* $\mathbb{R}^n$ *xét các véc tơ* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$. *Khi đó chúng ta có thể định nghĩa góc* $\theta \in [0, \pi]$ *giữa các véc tơ trên theo các công thức*

$$\cos\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}, \ \ \sin\theta = \frac{\sqrt{\sum_{1\le i\ne j\le n}(a_i b_j - a_j b_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}$$

Định lý 1.1.4. (Đồng nhất thức Lagrange mở rộng).
Với n *bộ số thực* $(a_1, b_1, u_1, v_1), (a_1, b_1, u_1, v_1),$
$\ldots, (a_n, b_n, u_n, v_n)$, *có đồng nhất thức*

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j u_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j v_j\Big) - \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} u_j v_j\Big) = \sum_{1\le j<k\le n} (a_j v_k - a_k v_j)(b_k u_j - b_j u_k). \tag{1.6}$$

Chứng minh. Ta có

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j u_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j v_j\Big) - \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} u_j v_j\Big)$$
$$= \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j u_j\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k v_k\Big) - \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} u_k v_k\Big)$$
$$= \sum_{j,k=1; j\ne k}^{n} a_j b_k u_j v_k + \sum_{j=1}^{n} a_j b_j u_j v_j - \Big(\sum_{j,k=1; j\ne k}^{n} a_j b_j u_k v_k + \sum_{j=1}^{n} a_j b_j u_j v_j\Big)$$
$$= \sum_{j,k=1; j\ne k}^{n} a_j b_k u_j v_k - \sum_{j,k=1; j\ne k}^{n} a_j b_j u_k v_k$$
$$= \sum_{1\le j<k\le n}^{n} (a_j b_k u_j v_k - a_j b_j u_k v_k + a_k b_j u_k v_j - a_k b_k u_j v_j)$$

$$= \sum_{1 \le j < k \le n}^{n} (a_j v_k - a_k v_j)(b_k u_j - b_j u_k).$$

Định lý được chứng minh. $\square$

Nhận xét 1.1.5. *Với $u_j = a_j$ và $v_j = b_j$, thì* (1.6) *có dạng*

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\Big) - \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\Big)^2 = \sum_{1 \le j < k \le n}^{n} (a_j b_k - a_k b_j)^2. \tag{1.7}$$

chính là đồng nhất thức Lagrange (1.1).

1.1.2 Trường hợp số phức

Định lý 1.1.6. (Đồng nhất thức Lagrange). *Cho các số phức $a_i, b_i,\ i = 1, 2 \cdots, n$. Khi đó có đồng nhất thức*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\Big) - \Big|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big|^2 = \sum_{1 \le i < j \le n} |a_i \overline{b}_j - a_j \overline{b}_i|^2. \tag{1.8}$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big|^2 &= \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} \overline{a_j}\overline{b_j}\Big) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i \overline{a}_j b_i \overline{b}_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} (a_i \overline{a}_j b_i \overline{b}_j + a_j \overline{a}_i b_j \overline{b}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|^2 + \sum_{i \ne j}^{n} |a_i b_j|^2 - \sum_{i \ne j}^{n} |a_i b_j|^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} (a_i \overline{a}_j b_i \overline{b}_j + a_j \overline{a}_i b_j \overline{b}_i) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|^2 + \sum_{i \ne j}^{n} |a_i b_j|^2\Big) - \Big(\sum_{i \ne j}^{n} |a_i b_j|^2 - \sum_{1 \le i < j \le n} (a_i \overline{a}_j b_i \overline{b}_j + a_j \overline{a}_i b_j \overline{b}_i)\Big) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2\Big) - \sum_{1 \le i < j \le n} (|a_i b_j|^2 + |a_j b_i|^2 - a_i \overline{a}_j b_i \overline{b_j} - a_j \overline{a}_i b_j \overline{b}_i) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2\Big) - \sum_{1 \le i < j \le n} |a_i \overline{b}_j - a_j \overline{b}_i|^2. \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

Từ (1.9) suy ra (1.8). Định lý được chứng minh.

1.2 Đồng nhất thức dạng Lagrange tổng quát

1.2.1 Dạng tổng quát

Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_s$ và $b_1, b_2, \dots, b_s$ là $2s$ số thực và

$$M_m := \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_k^m\Big(\sum a^{m+1-k}b^k \sum a^k b^{m+1-k}\Big),$$

trong đó $\sum a^k b^{m+1-k}$ là ký hiệu thu gọn của $\sum_{i=1}^{s} a^k b^{m+1-k}$, ngoài ra

$$C_k^m = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

Ta có kết quả sau

Định lý 1.2.1.

$$M_m = \begin{cases} \sum_{i<j}(a_ib_j - a_jb_i)^{2r}, & khi\ m = 2r-1; \\ \sum_{i<j}(a_ib_j - a_jb_i)^{2r}(a_ib_j + a_jb_i), & khi\ m = 2r. \end{cases}$$

Đồng nhất thức trên được gọi là Đồng nhất thức Lagrange tổng quát (dạng 2).

Chứng minh. Ta có

$$M_m := \sum a^{m+1}\sum b^{m+1} - C_1^m \sum a^m b \sum ab^m + \ldots + (-1)^m C_m^m \sum ab^m \sum a^m b.$$

1) Với $m = 2r-1$

$$\begin{aligned}
M_{2r-1} := &\sum a^{2r}\sum b^{2r} + \sum_{k=1}^{r-1}(-1)^k C_k^{2r-1}\Big(\sum a^{2r-k}b^k\Big)\Big(\sum a^k b^{2r-k}\Big)\\
&+ (-1)^r C_k^{2r-1}\Big(\sum a^r b^r\Big)^2 + \sum_{k=r+1}^{2r-1}(-1)^k C_k^{2r-1}\Big(\sum a^{2r-k}b^k\Big)\Big(\sum a^k b^{2r-k}\Big)\\
&= \sum a^{2r}\sum b^{2r} + \sum_{k=1}^{r-1}(-1)^k C_k^{2r-1}\Big(\sum a^{2r-k}b^k\Big)\Big(\sum a^k b^{2r-k}\Big)\\
&+ (-1)^r C_k^{2r-1}\Big(\sum a^r b^r\Big)^2 + \sum_{l=1}^{r-1}(-1)^l C_{2r-l}^{2r-1}\Big(\sum a^{2r-l}b^l\Big)\Big(\sum a^l b^{2r-l}\Big)\\
&= \sum a^{2r}\sum b^{2r} + \Big(\sum_{k=1}^{r-1}(-1)^k (C_k^{2r-1} + C_{2r-k}^{2r-1})\Big(\sum a^{2r-k}b^k\Big)\Big(\sum a^k b^{2r-k}\Big)\Big)
\end{aligned}$$